Newtons metode:

$$F(u) = 0$$

$$\underset{\text{ikke-lin.}}{F(u)} \approx \underset{\text{linear}}{\hat{F}(u)} = \underset{\text{Taylor}}{F(u_-) + F'(u_-)(u - u_-)}$$

$\hat{F} = 0 \Rightarrow \quad F(u_-) + F'(u_-)(u - u_-) = 0$ linear

$$u = u_- - \frac{F(u_-)}{F'(u_-)}$$

For logistisk likn: $(u^n \to u,\ u^{n-1} \to u_1)$

$$F(u) = \Delta t\, u^2 + (1 - \Delta t)\, u - u$$

$$F'(u) = 2\Delta t\, u + (1 - \Delta t)$$

Med it. indeks og tidsnivå

$$u^{n,k} = u^{n,k-1} - \frac{F(u^{n,k-1})}{F'(u^{n,k-1})}, \quad u^{n,0} = u^{n-1}$$

Konkret test:

- Newton er rask, typisk 1-3 iterasjoner selv for store Δt ($\Rightarrow$ dårlig startverdi)
- Picard 1-5 iterasjoner for små Δt, men opptil ca. 60 der Newton bruker 3

—

3. Geometrisk middel

$u' = u - u^2$ med Crank-Nicolson

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = u^{n+\frac{1}{2}} - \left(u^{n+\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\approx \frac{1}{2}(u^n + u^{n+1})$$

Blir 2. grads likn. i u^{n+1}

Trick: geometrisk middel for u^2-leddet

$\left(u^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 \approx u^n u^{n+1}$ (lineariserer!)

$$u^{n+1} + \Delta t\, u^n u^{n+1} - \frac{1}{2}\Delta t\, u^{n+1} = u^n + \frac{1}{2}\Delta t\, u^n$$

Har:

- FE: ingen iterasjon
- BE: Picard, Newton
- CN + geom. middel: ingen iterasjon ← klart best

Med PDEer og systemer av ODEer får vi systemer av ikke-lin. algebraiske likninger.

Nå: generalisere Picard og Newton til systemer

Generelt: $F(u) = 0$

$$F_0(u_0, u_1, \ldots, u_N) = 0$$
$$F_1(\quad -\text{"}- \quad) = 0$$
$$\vdots$$
$$F_N(\quad -\text{"}- \quad) = 0$$

$(N+1) \times (N+1)$ system

Spesielt: $\underset{\substack{(N+1)\times(N+1)\\ \text{matrise}}}{A(u)}\,u = \underset{\text{vektor}}{b(u)}$ (typisk for mange PDEer)

$$F(u) = A(u)u - b(u)$$

Picard: $F(u)$ – likt å omskrive uten flere detaljer

$A(u)u = b(u)$; $A(u_-)u = b(u_-)$ lineært likn. system

Med it. indeks: $A(u^k)u^{k+1} = b(u^k),\ k = 0, 1, \ldots$

Newton: $F(u) \approx \underset{\text{linear i } u}{\hat{F}(u)} = \underset{\text{Taylor}}{F(u_-) + \underset{\nabla F}{J}(u - u_-)}$

J: Jacobimatrisen til F, $J_{i,j} = \dfrac{\partial F_i}{\partial u_j}$

$$\underset{\text{vektor}}{F(u_-)} + \underset{\text{matrise}}{J(u_-)}\underset{\text{vektor}}{(u - u_-)} = 0$$

$\Rightarrow$

1. Løs $J(u_-)\,\delta u = -F(u_-)$ mhp δu
2. Oppdater $u = u_- + \delta u$

$(u_- \leftarrow u$, gjenta$)$

Med it. indeks

1. Løs $J(u^k)\,\delta u = -F(u^k)$
2. Oppdater $u^{k+1} = u^k + \delta u$

Relaxation (relaksasjon):

$$u^{k+1} = u^k + \underset{[0,1]}{\omega}\,\delta u$$

Problem: Newton kan konvergere sakte fordi δu blir for stor. Løsn: reduser tillegget til $\omega\,\delta u$

Picard: Løs $A(u_-)u^* = b(u_-)$ mhp u^*

$$u = \omega u^* + (1 - \omega)u_-$$

(evt. $u^{k+1} = \omega u^* + (1 - \omega)u^k$)

—

Eksempel: ODE system for influensa

$$S' = -\beta S I$$
$$I' = \beta S I - \nu I$$

Initialbet.: $S(0)$, $I(0)$

S: kan bli smittet
I: er smittet

Backward Euler:

$$S^n = S^{n-1} - \Delta t\, \beta S^n I^n$$
$$I^n = I^{n-1} + \Delta t\, \beta S^n I^n - \Delta t \nu I^n$$

Picard: $S^n I^n \to S^n I^n_-$; S-likn.

$S^n I^n \to S^n_- I^n$; I-likn.

(kan løse S-likn. først, har da S^n i I-likn.)

Newton: $S^n \to S$, $I^n \to I$, $S^{n-1} \to S_1$, $I^{n-1} \to I_1$

S_-, I_-: forrige iterasjons verdier

$$F_S(S, I) = S - S_1 + \Delta t\, \beta S I$$
$$F_I(S, I) = I - I_1 - \Delta t\, \beta S I + \Delta t\, \nu I$$

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_S}{\partial S} & \dfrac{\partial F_S}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F_I}{\partial S} & \dfrac{\partial F_I}{\partial I} \end{pmatrix} = \ldots\ldots \qquad \frac{\partial F_i}{\partial u_j}$$

Husk: I Newtons metode skal F og J evalueres for S_-, I_-: $F_S(S_-, I_-)$, $F_I(S_-, I_-)$, $J(S_-, I_-)$

Løs $J\,\delta u = -F$

$$S = S_- + \delta u_S$$
$$I = I_- + \delta u_I$$

ω hvis man vil

—

Neste eks: $u_t = (\alpha(u)u_x)_x + f(u)$

$\nabla \cdot \alpha(u) \nabla u$