Ikke-lineære likninger

Ukjent: u, lineært ledd $au + b$

$\uparrow$ skalar

Ikke-lineært: $u^2, u^5, \sin u \sim u - \frac{1}{6}u^3 + \dots$

Enkleste ikke-lineære ODE:

$$u' = u(1-u) \qquad u(0) = I \qquad \text{(logistisk likn.)}$$
$$= u - u^2$$

1. Tidsdiskretisering

Eksplisitt metode: alle ikke-lin. ledd blir evaluert på tidspkt. der vi kjenner funksjonen

Eks: Forward Euler

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = u^n - (u^n)^2$$

ukjent

kjent

Mer generelt: $u' = \underbrace{f(u,t)}_{\text{ikke-lin. ledd}}$ $\quad u^{n+1} = u^n + \Delta t \underbrace{f(u^n, t)}_{\text{kjent}}$

Andre skjemaer: Runge-Kutta 4. ordens
Adam-Bashforth

Ulempe: krever ofte veldig liten Δt for diffusjonslikninger: $u_t = \nabla^2 u$
el. $u_t = \nabla\cdot(\alpha(u)\nabla u)$

2. Implisitt tidsdiskretisering

Backward Euler:

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} = u^n - (u^n)^2 \qquad u^n: \text{ukjent}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t (u^n)^2 + (1-\Delta t)u^n - u^{n-1} = 0 \qquad \text{ikke-lin. likn.}$$

Kan løses med formel: to løsninger

Generelt med ikke-lin. likn: 0, 1 el mange løsninger

Her: en rot $\sim \frac{1}{\Delta t}$ irrelevant

en rot som er relevant

Iterative metoder:

- Picard iteration
- Newton's metode

Picard: har en løsn. u_- fra forrige iterasjon

Skriver om ikke-lin. vha u_- slik at de blir lineære

Her: $u^2 \approx u_- u$ $\qquad (u^n)^2 \approx u_-^n u^n$

kjent ukjent

$$\Delta t\, u_-^n u^n + (1-\Delta t)u^n - u^{n-1} = 0 \qquad \text{lineær}$$

Løser mhp u^n, setter $u_-^n = u^n$ og gjentar

Med iterasjonsindeks k: $u^{n,k}$ (u^n i iterasjon nr. k)

$$\Delta t\, u^{n,k-1} u^{n,k} + (1-\Delta t)u^{n,k} - u^{n-1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Start: $u^{n,0} = u^{n-1}$